EL FILTRO DE KALMAN

Carlos Pillajo
Universidad Politécnica Salesiana - Ecuador
cpillajo@ups.edu.ec
Javier E. Sierra
Universidad Pontificia Bolivariana – Colombia
javier.sierra@upb.edu.co

Resumen

El filtro de Kalman es un conjunto de ecuaciones matemáticas que proveen una solución recursiva eficiente del método de mínimos cuadrados. Esta solución permite calcular un estimador lineal, insesgado y óptimo del estado de un proceso en cada momento del tiempo con base en la información disponible en el momento t-1, y actualizar, con la información adicional disponible en el momento t, dichas estimaciones. Este filtro es el principal algoritmo para estimar sistemas dinámicos especificados en la forma de estado-espacio (State-space).

1. INTRODUCCIÓN

La representación estado-espacio es esencialmente una notación conveniente para la estimación de modelos estocásticos donde se asumen errores en la medición del sistema, lo que permite abordar el manejo de un amplio rango de modelos de series de tiempo.

El filtro es un procedimiento matemático que opera por medio de un mecanismo de predicción y corrección. En esencia este algoritmo pronostica el nuevo estado[2] a partir de su estimación previa añadiendo un término de corrección proporcional al error de predicción, de tal forma que este último es minimizado estadísticamente.

Dentro de la notación estado-espacio, la derivación del filtro de Kalman descansa en el supuesto de normalidad del vector de estado inicial y de las perturbaciones del sistema. De tal forma que es posible calcular la función de verosimilitud sobre el error de predicción con lo cual se lleva a cabo la estimación de los parámetros no conocidos del sistema.

El procedimiento de estimación completo es el siguiente: el modelo es formulado en estado- espacio y para un conjunto inicial de parámetros dados, los errores de predicción del modelo son generados por el filtro. Estos son utilizados para evaluar recursivamente la función de verosimilitud hasta maximizarla.

2. EL ALGORITMO DISCRETO DEL FILTRO DE KALMAN

El filtro de Kalman consiste en un conjunto de ecuaciones matemáticas que proveen una solución recursiva óptima, por el método de mínimos cuadrados. La meta de esta solución consiste en calcular un estimador lineal, insesgado y óptimo del estado[3] de un sistema en t con base en la información disponible en t-1, y actualizar, con la información adicional disponible en t, dichas estimaciones El filtro se desempeña suponiendo que el sistema puede ser descrito a través de un modelo estocástico lineal, en donde el error asociado tanto al sistema como a la información adicional que se incorpora en el mismo tiene una distribución normal con media cero y varianza determinada.

La solución es óptima por cuanto el filtro combina toda la información observada y el conocimiento previo acerca del comportamiento del sistema para producir una estimación del estado de tal manera que el error es minimizado estadísticamente. El término recursivo significa que el filtro recalcula la solución cada vez que una nueva observación o medida es incorporada en el sistema[4].

El filtro de Kalman es el principal algoritmo para estimar sistemas dinámicos representados en la forma de estado-espacio En esta representación el sistema es descrito por un conjunto de variables denominadas de estado. El estado contiene toda la información relativa al sistema a un cierto punto en el tiempo. Esta información debe permitir la inferencia del comportamiento pasado del sistema, con el objetivo de predecir su comportamiento futuro.

Lo que hace al filtro tan interesante es precisamente su habilidad para predecir el estado de un sistema en el pasado, presente y futuro, aún cuando la naturaleza precisa del sistema modelado es desconocida. En la práctica, las variables estado individuales de un sistema dinámico no pueden ser exactamente determinadas por una medición directa. Dado lo anterior, su medición se realiza por medio de procesos estocásticos que involucran algún grado de incertidumbre en la medición.

2.1 EL ALGORITMO

El filtro de Kalman estima el proceso anterior utilizando una especie de control de retroalimentación, esto es, estima el proceso a algún momento en el tiempo y entonces obtiene la retroalimentación por medio de los datos observados.

Desde este punto de vista las ecuaciones que se utilizan para derivar el filtro de Kalman se pueden dividir en dos grupos: las que actualizan el tiempo o ecuaciones de predicción y las que actualizan los datos observados o ecuaciones de actualización. Las del primer grupo son responsables de la proyección del estado al momento t tomando como referencia el estado en el momento t-1 y de la actualización intermedia de la matriz de covarianza del estado. El segundo grupo de ecuaciones son responsables de la retroalimentación, es decir, incorporan nueva información dentro de la estimación anterior con lo cual se llega a una estimación mejorada del estado.

Las ecuaciones que actualizan el tiempo pueden también ser pensadas como ecuaciones de pronóstico, mientras que las ecuaciones que incorporan nueva información pueden considerarse como ecuaciones de corrección. Efectivamente, el algoritmo de estimación final puede definirse como un algoritmo de pronóstico-corrección para resolver numerosos problemas

Las ecuaciones específicas para el pronóstico y la corrección del estado son detalladas en las tabla 1 y 2, respectivamente.

Tabla 1. Ecuaciones de pronóstico del Filtro de Kalman discreto

$$\hat{X}^*_t = A\hat{X}_{t-1}$$

$$P^*_t = AP_{t-1}A^T + Q$$

Note cómo las ecuaciones de la tabla 1 pronostican las estimaciones del estado y la covarianza hacia delante desde t-1 a t. La matriz A relaciona el estado en el momento previo t-1 con el estado al momento actual t, esta matriz podría cambiar para los diferentes momentos en el tiempo (t). Q representa la covarianza de la perturbación aleatoria del proceso que trata de estimar el estado.

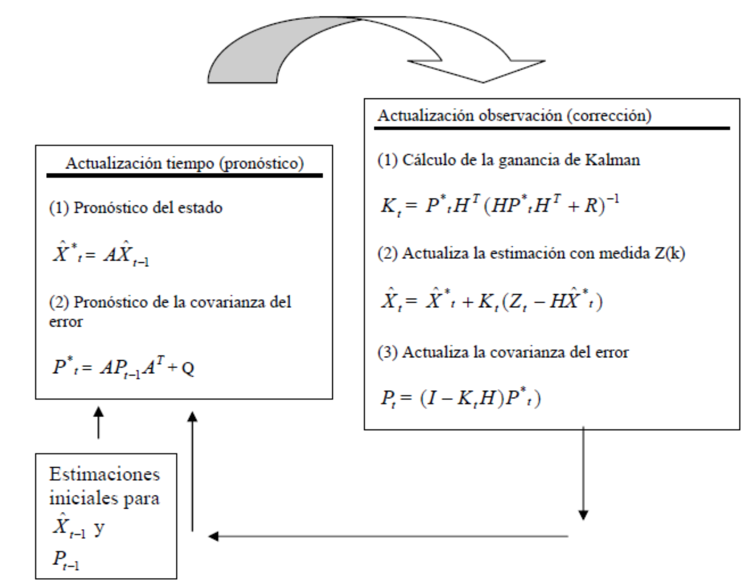
Tabla 2. Ecuaciones de corrección del Filtro de Kalman discreto
$K_t = P^*{}_t H^T (HP^*{}_t H^T + R)^{-1}$
$\hat{X}_t = \hat{X}^*{}_t + K_t(Z_t - H\hat{X}^*{}_t)$
$P_t = (I - K_t H)P^*{}_t)$

La primera tarea durante la corrección de la proyección del estado es el cálculo de la ganancia de Kalman, $K_{t,}$. Este factor de ponderación o ganancia es seleccionado de tal forma que minimice la covarianza del error de la nueva estimación del estado. El siguiente paso es realmente medir el proceso para obtener Z_t y entonces generar una nueva estimación del estado que incorpora la nueva observación como en la ecuación siguiente . El paso final es obtener una nueva estimación de la covarianza del error mediante la ecuación Pt

Después de cada par de actualizaciones, tanto del tiempo como de la medida, el proceso es repetido tomando como punto de partida las nuevas estimaciones del estado y de la covarianza del error. Esta naturaleza recursiva es una de las características llamativas del filtro de Kalman.

La figura 2 ofrece un cuadro completo de la operación del filtro, combinando con las ecuaciones de la tabla 1 y 2.

Figura 2. Una visión completa del filtro de Kalman



3. EL FILTRO DE KALMAN Y LA NOTACIÓN ESTADO-ESPACIO

El filtro de Kalman es el principal algoritmo para estimar sistemas dinámicos especificados en la forma de estado-espacio (State-Space). Tanto es así que modelos estado-espacio y modelos del filtro de Kalman son frecuentemente utilizados como sinónimos. Los modelos estado-espacio son esencialmente una notación conveniente para abordar el manejo de un amplio rango de modelos de series de tiempo. En la estimación y control de problemas esta metodología se basa en modelos estocásticos, dado el supuesto de la naturaleza errónea de las mediciones.

La representación estado-espacio de un sistema lineal captura la dinámica de un vector Z_t de orden nx1 en términos de un posible vector no observado X_t de orden *mx1* conocido como vector de estado.

Los modelos estado-espacio tienen muchas aplicaciones econométricas y algunas veces son denominados modelos de series de tiempo estructurales, dado que pueden ser constituidos de una forma particular imponiendo restricciones en alguno de sus parámetros naturales.

En la representación estado-espacio, por medio del filtro de Kalman, se calcula, a través de un procedimiento recursivo, el estimador óptimo del vector de estado en cada momento t basado en la información disponible hasta dicho momento. Este estimador es óptimo en el sentido que minimiza el error cuadrático medio.

La derivación del filtro de Kalman descansa en el supuesto de normalidad del vector de estado inicial y de las perturbaciones. De tal forma que es posible calcular la función de verosimilitud sobre el error de predicción, lo que permite llevar a cabo la estimación de los parámetros no conocidos del sistema. La violación del supuesto de normalidad conlleva a no poder garantizar que el filtro produzca la media condicional del vector de estado. Sin embargo, el estimador sigue siendo óptimo dentro de los estimadores lineales.

Entre las ventajas de la modelación estado-espacio se apuntan que permite un completo control sobre la dinámica del modelo y no lleva a una pérdida de generalidad dado que las variables pueden ser definidas con rezagos o adelantos. Por otra parte, realiza una separación de las fuentes de errores y por ello permite que la parte estocástica del modelo tenga diferentes efectos.

4. EL FILTRO DE KALMAN: VENTAJAS Y DESVENTAJAS

Por su parte, el filtro de Kalman consiste en un conjunto de ecuaciones que proveen una solución recursiva óptima, por el método de mínimos cuadrados, para un sistema dinámico lineal.

4.1 VENTAJAS

Evita la influencia de posibles cambios estructurales en la estimación. La estimación recursiva parte de una muestra inicial y actualiza las estimaciones incorporando sucesivamente una nueva observación hasta cubrir la totalidad de los datos. Lo anterior lleva a que la estimación más reciente de los coeficientes esté afectada por la historia lejana de la serie, lo cual en presencia de cambios estructurales podría sesgarla. Este sesgo se puede corregir con las estimaciones secuenciales[15] pero al costo de un mayor error estándar. Así el filtro de Kalman, como los métodos recursivos, utiliza toda la historia de la serie pero con la ventaja de que intenta estimar una trayectoria estocástica de los coeficientes en lugar de una determinística[16], con lo cual soluciona el posible sesgo de la estimación ante la presencia de cambios estructurales.

El filtro de Kalman utiliza el método de mínimos cuadrados para generar recursivamente un estimador del estado al momento k , que es lineal, insesgado y de varianza mínima. El filtro está en línea con el teorema de Gauss-Markov y esto le da al filtro de Kalman su enorme poder, para resolver un amplio rango de problemas en inferencia estadística.

El filtro se distingue por su habilidad para predecir el estado de un modelo en el pasado, presente y futuro, aún cuando la naturaleza precisa del sistema modelado es desconocida.
La modelación dinámica de un sistema es una de las características claves que distingue el método de Kalman. Los modelos lineales dinámicos son modelos con una transición lineal desde un periodo al próximo, los cuales pueden describir la mayoría de los modelos comúnmente utilizados en trabajos de series de tiempo.

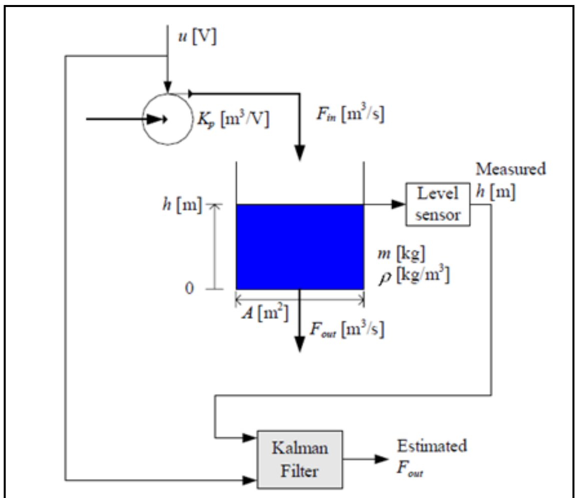
4.2 DESVENTAJAS

Entre las desventajas del filtro se menciona que requiere condiciones iniciales de la media y varianza del vector estado para iniciar el algoritmo recursivo. Sobre la forma de determinar estas condiciones iniciales no existe consenso. Por ejemplo, en un enfoque bayesiano este filtro requiere que se especifiquen a priori valores de los coeficientes iniciales y de sus respectivas varianzas. Una forma puede ser obtener esa información a partir de la estimación de un modelo similar al deseado pero con coeficientes fijos para un subperiodo muestral.

El desarrollo del filtro de Kalman, tal como se encuentra en el documento original, supone un conocimiento amplio en teoría de probabilidades, específicamente con el tema de la condicionalidad gaussina en las variables aleatorias, lo cual puede originar una limitante para su estudio y aplicación.

5 EJEMPLO DE FILTRO DE KALMAN

En la siguiente figura muestra un depósito de líquido. Diseñaremos un Filtro Kalman en estado estable para estimar el flujo de salida Fout. El nivel se mide la altura del líquido h.
Balance de masa del líquido en el tanque es (masa es ρAh)



Example Liquid tank

Las ecuaciones de estado para el flujo del líquido en el tanque es y asumiendo que el flujo desconocido es casi constante por lo tanto:

$$\dot{h}(t) = \frac{1}{A_{tank}}\left[K_p u - F_{Out}(t)\right] \qquad (1)$$

$$\dot{F}_{out}(t) = 0 \qquad (2)$$

El modelo del sistema esta dado por las ecuaciones anteriores, por efectos de notación se define :

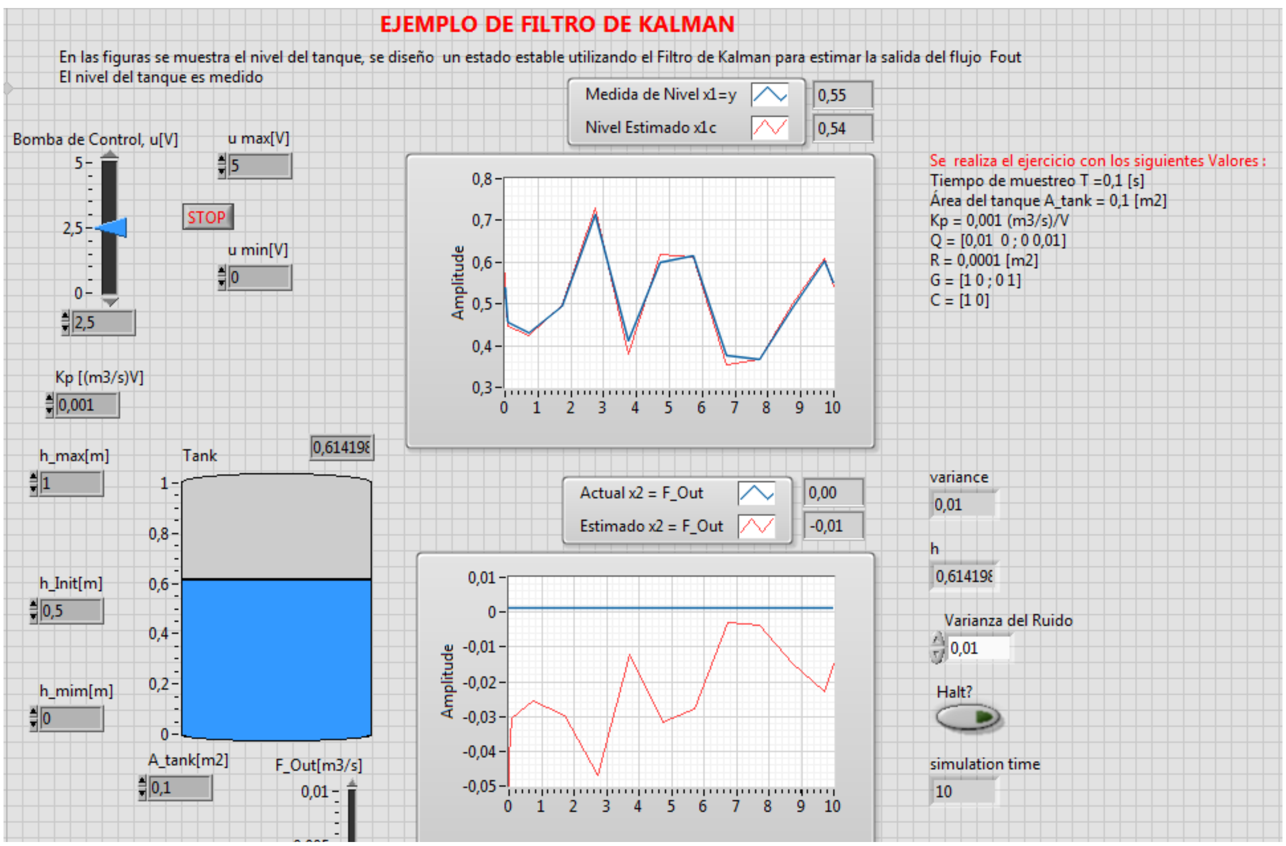
$$X_1 = h$$
$$X_2 = F_{Out}$$

Para desarrollar el ejemplo los siguientes valores numéricos son utilizados

Período de muestreo del tiempo T = 0.1
Área de recipiente A_tank = 0.1 [m2]
Konstante multiplicadora para determinar el flujo de entrada Kp = 0.001 (m3/s)/V
Matriz Q de varianzas inicialmente ajustada Q= [0.01 0 ; 0 0.01]

Para determinar la ganancia del Filtro de Kalman es necesario :
La matriz de transición de estados A = [1 ‘-(T/A_tank) ; 0 1]
La matriz de ganancia de ruido del proceso (se asume la Matriz identidad) G= [1 0 ; 0 1]

Matriz de ganancia Medición C = [1 0]
El ruido del proceso de auto-covarianza Q = [0.01 0; 0 0.01] (inicialmente debe ser ajustada)
Ruido de medición automática –covariance R = 0.001 [m2]



En la figura anterior se muestra el panerl frontal de la simulación en Labview de este ejemplo donde el Flujo de salida FOut = x2 cambia durante la simulación y el filtro de kalman estima los valores para el estado estable sin importar el ruido. Durante la simulación se cambia los valores de Q

La Figura a) muestra cómo se calcula el estado de ganancia de Kalman Filter constante Ks utilizando la función de ganancia de Kalman. La figura también muestra cómo comprobar observabilidad con la función de matriz de observabilidad. La figura b) muestra la aplicación de las ecuaciones del filtro de Kalman en un Formula Node en Labview

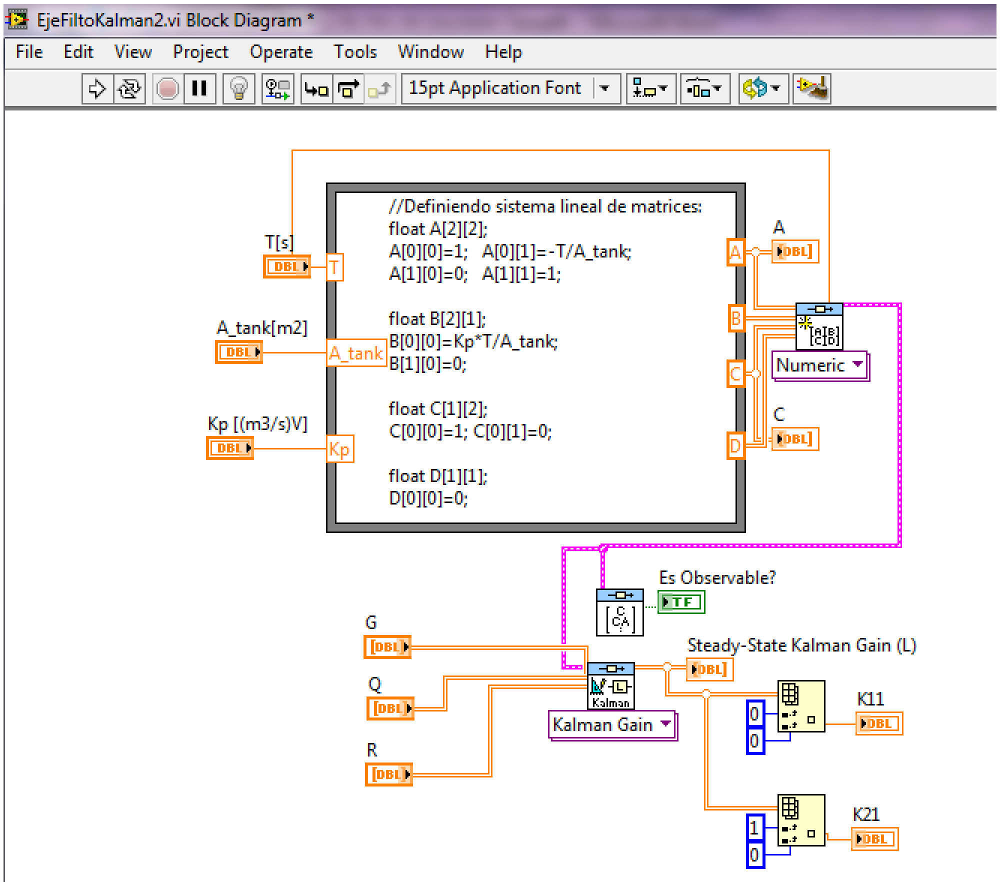


Figura a

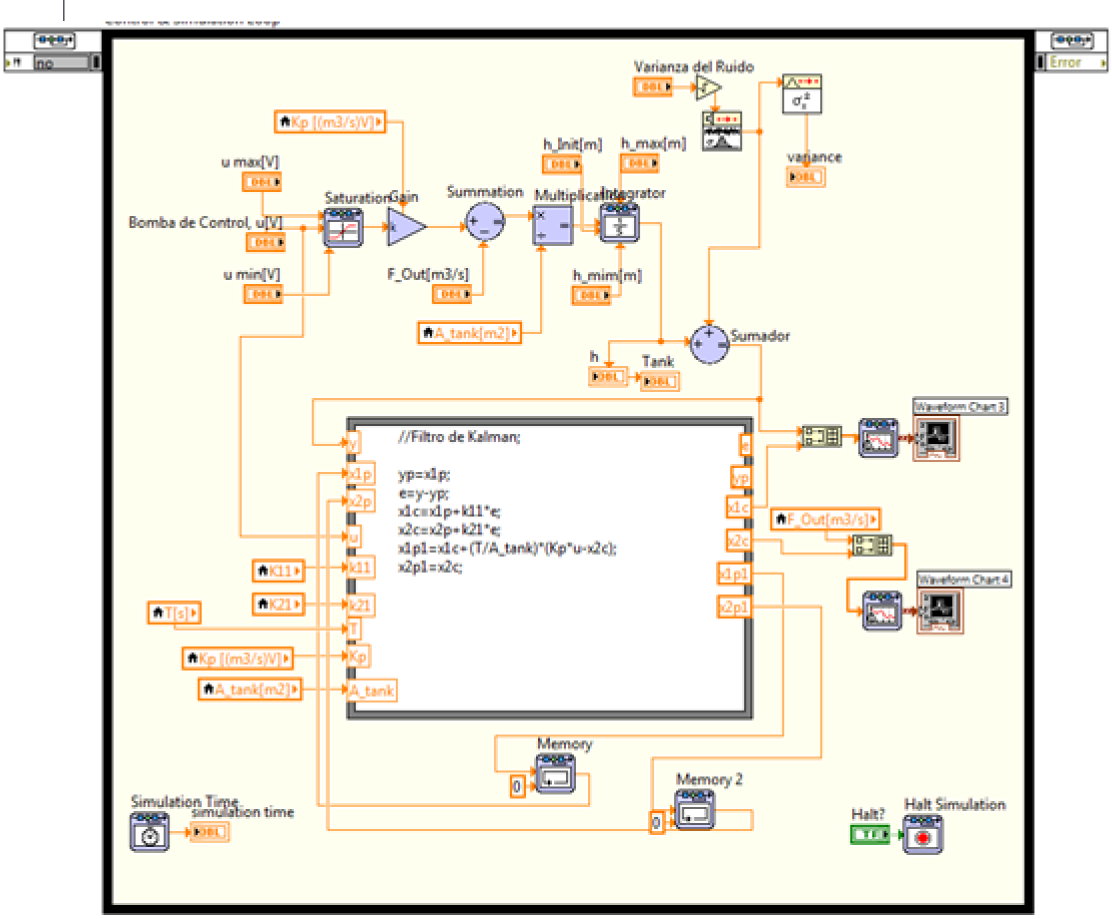


Figura b

Mediante el filtro de kalman se quiere predecir Fout = x2 el flujo de salida y la altura del nivel del líquido h =x1, mediante las ecuaciones de estados las que describe el comportamiento del sistema futuro a través de los estados presentes, los que están dados según las ecuaciones del sistema Cabe anotar que en este ejemplo se realiza una simulación del ruido blanco con una esperanza del ruido igual a cero y la varianza de ruido constante, la cual es introducida, ya que el filtro de kalman optimiza y asi presdice las variables de salida

Para visualizar el comportamiento de esta simulación ver en Youtube buscarlo como filtro de kalman con labview, en la URL : https://www.youtube.com/watch?v=zLcov_4fpgk

6. BIBLIOGRAFÍA

Blake, Andrew (2002) *"State-Space Models and the Kalman Filter: Application, Formulation and Estimation"*, Bank of England.

Greenslade, Jennifer and Jumana Saleheenn, "*A Kalman filter Approach to estimating the UK NAIRU*", Working Paper No 179, Bank of England, 2003.

Harvey, A.C. (1989) "*Forecasting, structural Time Series Models and the Kalman Filter*", Cambridge University Press, Cambridge.

Kalman, R.E., A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, Trans. ASME,J. Basic Engineering, vol 82, March 1960, pp 94-35.

Kichian, Maral y Luger, Richard (2001) *"On Inflation and the Persistence of Shocks to output"*, WP 2001-22. Bank of Canada (Apéndice A, pág 18).

Hamilton, J.D. (1994) *"Time Series Analysis"*, Princeton University Press.

Le Roux, Joel (2003) "*An Introduction to Kalman filter*", University of Nice.

Welch, Greg abd GaryBishop, "*An Introduction to the Kalman Filter*", TR 95-041, Department of Computer Science, University of North Carolina at Chapel Hill, 2002.